(1) (d) (i) použijeme Cauchyovu větu o střední hodnotě pro $f(x) = e^x$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$, $a=0$, $b=1$.

Tak dostaneme $\xi \in (0,1)$, že

$$e^{\xi}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = f'(\xi)(g(1)-g(0)) = g'(\xi)(f(1)-f(0)) = \frac{1}{1+\xi^2}(e-1).$$

To po úpravě dává požadovanou rovnost.

(ii) Nerovnost triviálně platí pro $x=0$. Pro $x>0$ použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě pro $f(x) = \sin x$, $a=0$, $b=x$. Ta dává $\xi \in (0,x)$, že

$$\cos(\xi) = f'(\xi) = \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \frac{\sin x}{x}.$$

Odtud

$$|\sin x| = |x \cdot \cos \xi| = |x| \cdot |\cos \xi| \leq |x|.$$

Případ $x<0$ vyplyne z lichosti funkce sin.

(iii) Z Rolleovy věty existuje b_n mezi a_n a a_{n+1}, že $f'(b_n) = f(a_{n+1}) - f(a_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Potom snadno $\lim\limits_{n\to\infty} f'(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

(2) (b) (i) neplatí, stačí volit $f(x)=g(x)=h(x)=x$, $a=0$.

(ii) platí $\lim_{x\to a}\frac{f(x)+h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}+\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{g(x)}=1+0=1$

(iii) neplatí, stačí zvolit $f(x)=x$, $g(x)=\sin x$, $\psi(x)=\phi(x)=-x$

a $a=0$. Potom $\lim_{x\to a}\frac{f(x)+\psi(x)}{g(x)+\phi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{\sin x-x}=0$

(iv) platí

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot\psi(x)}{g(x)\cdot\phi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\phi(x)}=1\cdot 1=1$$

(v) platí, je-li $|h(x)|\leq C\cdot|g(x)|$ $x\in P(a,\delta)$ pro

nějaké $0<\delta<1$. Potom pro $x\in P(0,\delta)$

platí $x^4\in P(0,\delta)$ a tedy $a+x^4\in P(0,\delta)$

a $|h(a+x^4)|\leq C\cdot|g(a+x^4)|$

(vi) neplatí, stačí volit $\psi(x)=\phi(x)=0$, $a=b=0$ a

$$h(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x} & x\neq 0,\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

Potom podíl $\frac{\psi\circ h}{\phi\circ h}$ není definován

na žádném $P(b,\delta)$, $\delta>0$.

(3) (a) (i) Předně $g \in R([-5,-3]) \Rightarrow 3g \in R([-5,-3])$,

protože $S(3g, D) = 3S(g, D)$ a $s(3g, D) = 3s(g, D)$, $D \in \mathcal{D}([-5,-3])$,

což dává $$\underline{\int_{-5}^{-3}} 3g = 3\underline{\int_{-5}^{-3}} g = 3\overline{\int_{-5}^{-3}} g = \overline{\int_{-5}^{-3}} 3g .$$

Volme $\varepsilon > 0$.

Z věty o nutné a postačující podmínce pro existenci Riemannova integrálu pak existují $D_1, D_2 \in \mathcal{D}([-5,-3])$,

že $S(f, D_1) - s(f, D_1) < \frac{\varepsilon}{3}$ a $S(3g, D_2) - s(3g, D_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Je-li D společné zjemnění D_1 a D_2, potom

$$\begin{aligned} S(f+3g, D) - s(f+3g, D) &\leq S(f, D) + S(3g, D) - s(f, D) - s(3g, D) \\ &\leq S(f, D_1) - s(f, D_1) + S(3g, D_1) - s(3g, D_1) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

a stačí opět použít nutnou a postačující podmínku.

(ii) Víme, že f je omezená na $[-5,-3]$ a tedy

i g je omezená na $[-5,-3]$. Volme $C>0$, že $|g(x)|\leq C$ $x\in[-5,-3]$.

Pro $\varepsilon>0$ volme dělení $D^*\in\mathcal{D}[-5,-3]$, že $S(f,D)-s(f,D)<\frac{\varepsilon}{2}$.

Volme $D\in\mathcal{D}([-5,-3])$ zjemnění D^*, že $|D|<\frac{\varepsilon}{4C}$.

Potom
$$S(g,D)-s(g,D)\leq\left(M_{n-1}^{D}-m_{n-1}^{D}\right)(-3-x_{n-1})+S(f,D)-s(f,D)$$
$$\leq 2C\cdot|D|+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$